

Examen de la 2ème Session d'Atomistique

Seule la calculatrice scientifique non programmable est autorisée

Durée : 02 heures 00 mn

Exercice 1 : 06 points

1. Calculer les charges effectives des groupes de Slater pour les espèces Be et Be⁻ (Be : Z=4).
2. Calculer les rayons atomiques des entités Be et Be⁺. Comparer les valeurs trouvées et conclure.
3. Calculer les énergies de première ionisation des entités Be et Be⁺.

Exercice 2 : 06 points

Les longueurs d'onde des raies du spectre de Rayons X sont de 2,285 Å pour le Chrome ($^{52}_{24}\text{Cr}$) et de 1,2513 Å pour le Germanium ($^{73}_{32}\text{Ge}$). On donne : $c = 3.10^8 \text{ m/s}$

1. Tracer la courbe $\sqrt{1/\lambda} = f(Z)$. En déduire la pente de la courbe.
2. Déterminer graphiquement la valeur de **Z** pour l'élément X inconnu dont la longueur d'onde de la raie correspondante est égale à 1,6545 Å.
3. Calculer la constante d'écran pour cette série d'élément.

Exercice 3 : 08 points

Soient les éléments suivants : F (Z=9) et Sb (Z=51)

1. a. Etablir la configuration électronique de ces éléments et indiquer leurs position dans le tableau périodique. b. Comparer l'électronégativité de ces deux éléments puis justifier.
2. On considère la molécule SbF_n où n désigne un entier naturel.
 - a. Quels sont les valeurs possibles de n ?
 - b. Pour chacune des valeurs de n trouvées, donner la structure de Lewis des molécules correspondantes.
 - c. Prévoir alors la géométrie de ces molécules en utilisant les règles de Gillespie.

Université Nazi BONI Année Académique 2018-2019

Unité de Formation et de Recherche Filière : MPI₁, L₁-S₁
en Sciences et Techniques

**Examen de la Première Session d'Atomistique et de
liaisons chimiques**

*Le tableau de classification périodique des éléments ainsi que les
tables des structures Moléculaires de Gillespie sont formellement
interdits.*

Durée : 02 heures 00 mn

Questions de Cours : 03 points

1. Combien y-a-t-il de valeurs possibles pour le nombre quantique secondaire l si $n = 3$?
2. Combien de valeurs de m sont-elles permises pour un électron dans une sous couche 3d ?
3. Préciser les nombres quantiques des électrons occupant les orbitales atomiques 2p ?

Exercice 1 : 04 points

1. Donner la configuration électronique de l'atome de cuivre ($Z = 29$). Justifier l'anomalie de remplissage observée.
2. Calculer le rayon atomique de cuivre ($a_0 = 52,9 \text{ pm}$).
3. Calculer l'énergie de première ionisation de l'atome de cuivre.

Exercice 2 : 06 points

Les données suivantes concernent les longueurs d'onde observées dans le spectre de Rayons X de divers éléments :

Eléments	Mo	Ag	Sn	Cs	La	X
Z	42	47	50	55	57	?
$\lambda \cdot 10^{12} \text{ (m)}$	540,1	415,4	360,1	289,6	266,9	157

1. Tracer la courbe $\sqrt{1/\lambda} = f(Z)$. La loi de Moseley est-elle vérifiée ?
2. En déduire graphiquement le numéro atomique de l'élément X.
3. Déterminer la pente de la courbe ; à quoi correspond cette valeur ?
4. Calculer la constante d'écran pour cette série d'élément.

Exercice 3 : 07 points

Soient les éléments suivants : F ($Z=9$), Se ($Z=34$) et Sb ($Z=51$)

1. Etablir la configuration électronique de ces éléments et indiquer leurs position dans le tableau périodique.
2. a. Donner la structure de Lewis des molécules suivantes : SeF₆, SbF₅ et SbF₃.
(L'atome souligné constitue l'atome central).
b. Prévoir la géométrie de ces molécules en utilisant les règles de Gillespie.

Université Nazi BONI Année Académique 2019-2020

Unité de Formation et de Recherche
en Sciences et Techniques Filière : MPI/L₁ - S₂

Examen de la Première Session de Chimie 2

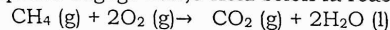
Seule la calculatrice scientifique non programmable est autorisée
Durée : 02 heures 30 mn

Exercice 1 : 06 points

- Donner le nom et symbole des grandeurs thermodynamiques manquantes dans les expressions suivantes :
a) = $PV + U$ b) = $U - TS$
- a. Evaluer au cours d'une transformation à pression atmosphérique la quantité de chaleur Q et le travail W échangés par une mole de gaz parfait chauffé de 0 à 80 °C.
b. Reprendre les calculs de Q et W pour une transformation isochore. On donne $C_V = 21,05 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $C_P = 29,36 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et la pression atmosphérique vaut 1 atm.

Exercice 2 : 06 points

La combustion totale d'une mole de méthane à 25 °C et sous atmosphère dégage 212,8 Kcal selon la réaction suivante :



- Déterminer la valeur de l'énergie interne ΔU° à 298 K de la combustion du méthane.
- Connaissant les enthalpies des réactions suivantes à 298 K:
 $\text{C}(\text{s}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{CO}_2(\text{g})$ (1) $\Delta H^\circ_1 = -94,05 \text{ Kcal}$
 $\text{H}_2(\text{g}) + \frac{1}{2} \text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ (2) $\Delta H^\circ_2 = -68,3 \text{ Kcal}$
a. Calculer l'enthalpie molaire de la formation du méthane

gazeux à 298 K.

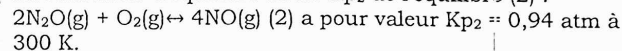
- Calculer l'enthalpie molaire de la combustion du méthane sous une atmosphère et à la température de 350 K.

On donne les chaleurs molaires des corps suivants :

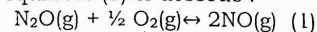
$C_p(\text{H}_2\text{O}, \text{l}) = 18,0 \text{ cal.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $C_p(\text{CH}_4, \text{g}) = 13,2 \text{ cal.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
 $C_p(\text{O}_2, \text{g}) = 7,6 \text{ cal.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $C_p(\text{CO}_2, \text{g}) = 11,2 \text{ cal.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Exercice 3 : 08 points

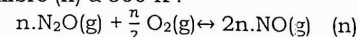
La constante d'équilibre notée K_{p2} de l'équilibre (2) :



- Calculer la constante d'équilibre K_{p1} à 300 K correspondant à l'équilibre (1) ci-dessous :

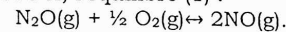


- a. Conclure et en déduire la constante d'équilibre K_{pn} qui accompagne l'équilibre (n) à 300 K :



- b. Quelle est la valeur de K_{p5} pour $n = 5$.

- On considère à 300 K, l'équilibre (1) :



- a. Calculer $\Delta_r H^\circ_1$ qui accompagne la réaction (1) à 300 K sachant que les tables thermodynamiques donnent les valeurs de l'entropie absolue standards des composés.

Composés	N ₂ O	NO	O ₂
S° en J.K ⁻¹ .mol ⁻¹	219,7	210,7	205

- b. Dans quel sens évolue alors la réaction (1) à 300 K.
- Calculer la constante d'équilibre accompagnant l'équilibre (1) à 900 K si on admet $\Delta(nC_p) = 0$.

Contrôle de Maths pour la Physique

Durée: 2h

QCM (5pts)

Choisissez la ou les bonnes réponse(s)

- Deux vecteurs ont leur produit scalaire nul. Il suffit
 - qu'ils soient parallèles.
 - qu'ils soient orthogonaux.
 - que l'un au moins soit nul.
- L'ensemble des points de l'espace rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ vérifiant $\ln(x^2 + y^2 + z^2) = 2$ est
 - un cercle.
 - un cylindre.
 - une sphère.
- Si $\vec{A}(u)$ est une fonction vectorielle de norme constante, sa dérivée $\vec{A}'(u)$
 - est de norme constante
 - est le vecteur nul
 - est perpendiculaire à $\vec{A}(u)$.
- La limite quand $h \rightarrow 0$ de $\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$
 - est la dérivée première de $f(x)$.
 - est la dérivée seconde de $f(x)$.
 - n'a pas de signification.

Exercice 1. (2+3)=5pts

Les formes différentielles suivantes sont-elles différentielles totales? Si oui déterminer les fonctions pour lesquelles elles sont les différentielles.

1. $\omega = \frac{xdy - ydx}{xy}$.

2. $\omega = \frac{z}{x}dx + \frac{z-x}{y}dy - dz$.

Exercice 2. 6pts

Trois points A, B, C sont repérés en coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec les valeurs suivantes : $A(a, 90^\circ, 0)$, $B(a, 90^\circ, \varphi_1)$, $C(a, \theta_2, \varphi_2)$.

Ecrire les coordonnées cartésiennes et calculer le produit mixte $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$.

Comment faut-il placer les trois points pour obtenir le parallélépipède construit sur les quatre points O, A, B et C de plus grand volume? Quelle est la forme de ce solide?

Exercice 3. (4pts)

Calculer la différentielle de $f(x, y) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}\right)$

Bonne inspiration

Rattrapage de Maths pour la Physique

Durée: 2h

Exercice 1. 7pts

On rapporte l'espace à une base orthonormale directe. Soient quatre vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ de l'espace.

1. Montrer l'identité de Jacobi :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$$

2. Montrer que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

3. Montrer que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \vec{c} - \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{d}$$

Exercice 2. (7pts)

On considère ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega = (x^2 + y^2 - a^2)dx - 2aydy,$$

où a un un nombre réel non nul.

1. La forme différentielle ω est-elle exacte?
2. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha(x, y) = f(x)\omega(x, y)$. Quelle condition doit vérifier la fonction f pour que la forme différentielle α soit exacte? Cette condition est-elle suffisante? Déterminer une fonction f vérifiant cette condition.

Exercice 3. (6pts)

Donner les équations paramétriques de la courbe décrite par le point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) lorsque φ varie (r et θ restant fixés).

- Calculer, par dérivation, le vecteur tangent à la courbe, en déduire les coordonnées cartésiennes de e_φ .
- Donner les équations paramétriques de la courbe décrite par le point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) lorsque θ varie (r et φ restant fixés).
- Calculer les coordonnées cartésiennes de e_θ .

Bonne inspiration

Session de rattrapage de physique

Exercice 1 (6pts)

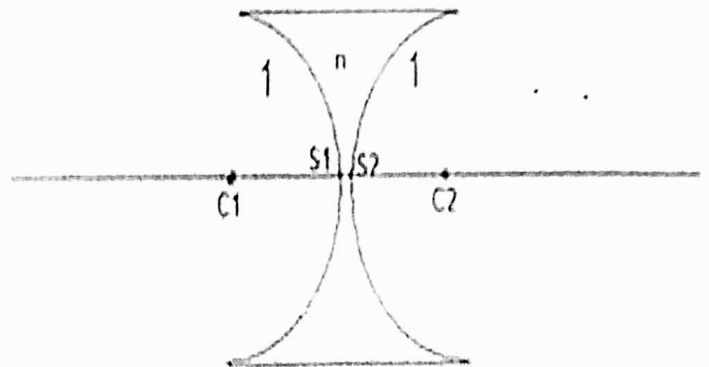
Soit la lentille mince ($S_1=S_2=S$)

biconcave ci-dessous $\overline{SC_1} =$

-10 cm , $\overline{SC_2} = 15 \text{ cm}$ et $n =$

1,5 Déterminer :

- 1) la relation de conjugaison avec origine en S ;
- 2) la position de l'image d'un objet situé à 20cm de S $\overline{SA} = -20 \text{ cm}$
- 3) Déterminer le grandissement du système.



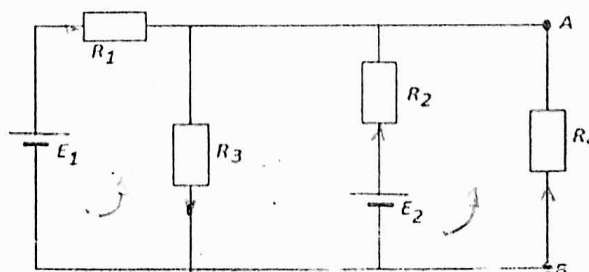
Exercice 2 (7pts)

Deux lentilles minces convergentes identiques de centres optiques O_1 et O_2 , dont la distance focale est égale à 30cm, sont séparées de 20cm. Un objet $\overline{AB}$ est placé à 60 cm, de la 1ère lentille.

- 1) Donner le symbole (p, q, r) du doublet en choisissant l'échelle $a=20$.
- 2) Déterminer la position de l'image finale et le grandissement.
- 3) Déterminer sa distance focale f' .
- 4) Déterminer la position des foyers principaux objet et image F et F' respectivement par rapport aux centres optiques O_1 et O_2 .
- 5) Déterminer également la position des points principaux H et H' respectivement par rapport aux centres optiques O_1 et O_2
- 6) Faites le schéma et placer les points F et F' ainsi que les points principaux H et H' .

Exercice 3 (7pts)

1. Calculer les courants dans chaque branche à l'aide des équations de Kirchhoff dans le circuit ci-dessous
2. Déterminer le générateur de Thévenin entre A et B. En déduire le courant qui traverse la branche AB. Données : $E_1 = 10 \text{ V}$; $E_2 = 20 \text{ V}$; $R_1 = 80 \Omega$; $R_2 = 40 \Omega$; $R_3 = 50 \Omega$; $R_4 = 70 \Omega$; $R_5 = 40 \Omega$



Contrôle de Physique
(3 heures)

Optique (10 points)

Exercice 1 (06 points)

1. Tracer la marche du rayon lumineux arrivant sur le prisme en précisant les différents angles.

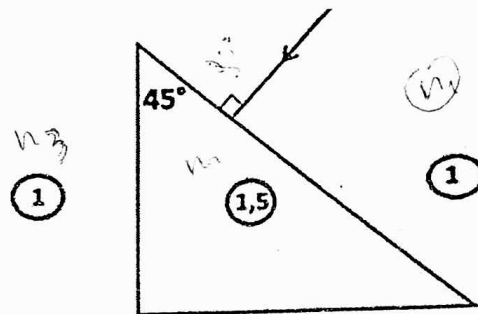


Figure 2

2. La lentille L_1 est divergente et L_2 , convergente. $\overline{F'_1O_1} = \overline{F_2O_2} = 3 \text{ cm}$; $\overline{O_1O_2} = 8 \text{ cm}$. Reproduire le schéma et compléter la marche du rayon incident 1 et du rayon émergent 2.

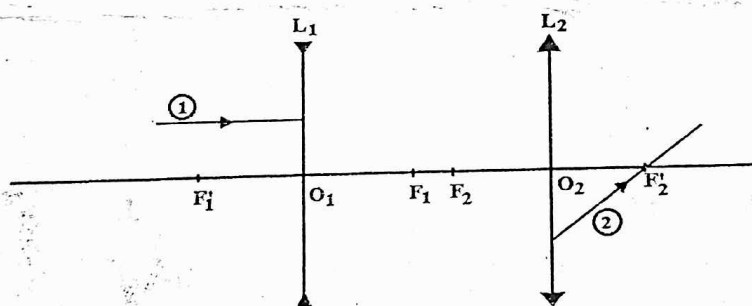


Figure 3

Exercice 2 (04 points)

On considère la lentille demi-boule suivante :

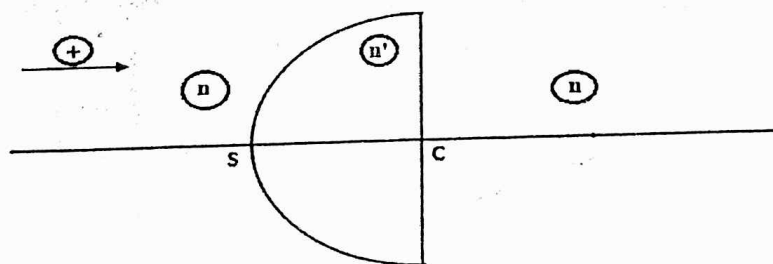


Figure 4

- 1) Déterminer la relation de conjugaison de la lentille en fonction de n , n' et R . ($\overline{SC} = R$).
- 2) Donner la position des foyers objet et image de la lentille. ($n = 1$; $n' = \frac{4}{3}$).
- 3) Un objet AB est placé à une distance $2R$ du centre C de la lentille. Trouver la position finale de son image $A'B'$.

Electricité (10 points)

Exercice 1 : (05 points)

1. Ecrire l'équation de conservation de charges dans un conducteur électrique pour lequel ρ représente la densité volumique des charges mobiles et $\vec{j}$, la densité du courant.
2. Ecrire l'équation traduisant le théorème de Gauss, en donnant la signification de chaque terme.
3. Définir un dipôle actif et donner en un exemple.

Exercice 2 (05 points)

Soit le réseau électrique représenté par la figure ci-dessous.

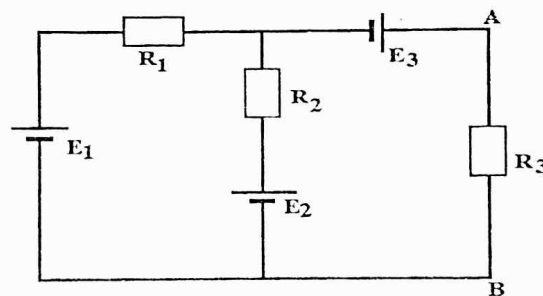


Figure 5

$$E_1 = 1,5 \text{ V}; \quad E_2 = 4 \text{ V}; \quad E_3 = 3 \text{ V}; \quad R_1 = 20 \, \Omega; \quad R_2 = 10 \, \Omega; \quad R_3 = 15 \, \Omega$$

1. Calculer les courants dans chaque branche à l'aide des équations de Kirchhoff.
2. Déterminer le générateur de Thévenin entre A et B. En déduire le courant qui traverse la résistance R_3 .

Devoir de logique et raisonnement mathématique
Durée : 3 heures

Exercice. $(2+2+2+2+2+2+2+2+2+2)pts$

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Montrer que les propositions $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$ et $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ sont égales.
- (2) Donner la négation des assertions suivantes.
 - (a) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
 - (b) Dans toutes les fermes, toutes les vaches sont noires.
 - (c) Pour tout entier x , il existe un entier y tel que, pour tout entier z , la relation $z < x$ implique la relation $z < x + 1$.
 - (d) $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 (|x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon)$.
- (3) Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-ensembles d'un ensemble E . Alors le cardinal de leur réunion est donnée par la formule suivante :

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right]$$

Ecrire en extension cette formule pour $p = 1$ puis pour $p = 4$.

- (4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2n - 1 \leq n! \leq n^n$.
- (5) Calculer le pgcd entre $2^{445} + 7$ et 15.
- (6) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer le pgcd entre $n^2 + n$ et $2n + 1$.
- (7) Montrer que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admet pas de solution entière.
- (8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.
- (9) Soit $p_1, p_2, \dots, p_r$, r nombres premiers. Montrer que l'entier $p_1 p_2 \dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des p_i . En déduire l'existence d'une infinité de nombres premiers.
- (10) Soient a et b deux rationnels tels que $a + b$ et $a \times b$ sont des entiers. Montrer que a et b sont des entiers.

Devoir de logique et raisonnement mathématique
Durée : 3 heures

Exercice. (2+2+2+2+2+2+2+2+2+2)pts

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
 - (a) Montrer que si $a, b \in \mathbb{Z}$ sont tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.
 - (b) En déduire que si $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ alors
$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \iff (m, n) = (p, q)$$
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.
- (3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition :
"Si n^2 est impair alors n est impair."
- (4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est impair.
- (5) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall \epsilon > 0, a \leq \epsilon \implies a = 0$.
- (6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition : $P_n : 2^n > n^2$.
 - (a) Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.
 - (b) Pour quelles valeurs de n la proposition P_n est-elle vraie ?
- (7) Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, p\}$ avec $n, p \in \mathbb{N}$. Justifier le raisonnement.
- (8) Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-ensembles d'un ensemble E . Alors le cardinal de leur réunion est donné par la formule suivante :

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right]$$

Écrire en extension cette formule pour $p = 2$ puis pour $p = 5$.

- (9) Pour quels $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $8 \mid 3^n + 4n + 1$?
- (10) En raisonnant dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ montrer que
$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}, (7 \mid a^3 + b^3 + c^3 \implies 7 \mid abc).$$

Devoir de logique et raisonnement mathématique
Durée : 3 heures

Exercice 1. (1+1+1+1)pts

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes.

- (1) Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, M est sur le cercle C de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω est R .
- (2) La fonction f est l'identité de $\mathbb{R}$.
- (3) La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
- (4) Pour chaque entier naturel, on peut trouver un entier naturel strictement plus grand.

Exercice 2. (2+2+2+2)pts

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Montrer le théorème logique suivant :
 $((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$
- ✕ (2) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer en précisant le mode de raisonnement que $nm = 1 \Rightarrow n = 1 = m$
- ✕ (3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en précisant le mode de raisonnement que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.
- ✕ (4) Montrer en précisant le mode de raisonnement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2^n > n$.

Exercice 3. ((1+2)+2+(1+1+1))pts

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

- ✕ 1. Déterminer les entiers relatifs n tels que
 - a. $\frac{13}{n+2} \in \mathbb{Z}$,
 - b. $n+4$ divise $2n^2 - n - 8$.
2. Montrer par récurrence puis en utilisant les congruences que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{2n} + 3$ est divisible par 4.
- ✕ 3.
 - a. Montrer que si a et b sont des entiers tels que $a^2 + b^2$ sont impairs, alors a et b sont de parité différente.
 - b. Montrer qu'un entier impair n qui est la somme de 2 carrés est de la forme $n = 4k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$.
 - c. En déduire qu'un entier de la forme $4k - 1$ ne peut pas être la somme de 2 carrés.

Devoir de logique et raisonnement mathématique
Durée : 3 heures

Exercice 1. (2+1+1+2+2+2)pts

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Construire la table de vérité de $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ puis celle de $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$. Quelle conclusion en tirer?
- (2) L'assertion $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ est-elle vraie ou fausse. Justifier la réponse.
- (3) L'assertion $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$ est-elle vraie ou fausse. Justifier la réponse.
- (4) Donner la négation de la proposition : "Tous les habitants de Nasso qui ont les yeux rouges gagneront au PMU et prendront leur retraite avant 40 ans."
- (5) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. On considère l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $n \mapsto f(n) = f_n(n) + 1$. Montrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.
- (6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ on a $n^2 \leq 2^n$.

Exercice 2. (1+1+1+3+2+2)pts

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Calculer $\text{pgcd}(61542, 6514)$.
- (2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a|b$ et $b|a \implies a \in \{-b, b\}$.
- (3) Montrer que $10^6 \equiv 1[7]$.
- (4) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a \equiv b[n] \implies a^n \equiv b^n[n^2]$.
- (5) Montrer que si n est impair alors 8 divise $7^n + 1$.
- (6) Montrer que l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Don
et

Contrôle de rattrapage d'Analyse I
Durée: 2h30

Questions de cours

- I) 1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. Soit (u_n) une suite de nombres réels décroissante et minorée. Montrer que (u_n) converge vers $\ell = \inf\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$.
3. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On sait que f est strictement croissante sur $[a, b]$ si $f' > 0$ sur $]a, b[$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier votre réponse.
- II) On considère la fonction f dont le graphe est joint en annexe.
1. Donner le domaine de définition de la fonction f .
2. Déterminer le domaine où la fonction f est continue et indiquer les éventuels points de discontinuité.
3. Déterminer le domaine où la fonction f est dérivable et indiquer les éventuels points de non dérivabilité.
4. Dire si la fonction admet des asymptotes et de quel type.

Exercice 1

On considère pour tout entier naturel n , la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

1. Etudier les variations de f_n .
2. Montrer que, $\forall n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n) .
4. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent simple de $u_n - \frac{1}{n}$.

Exercice 2

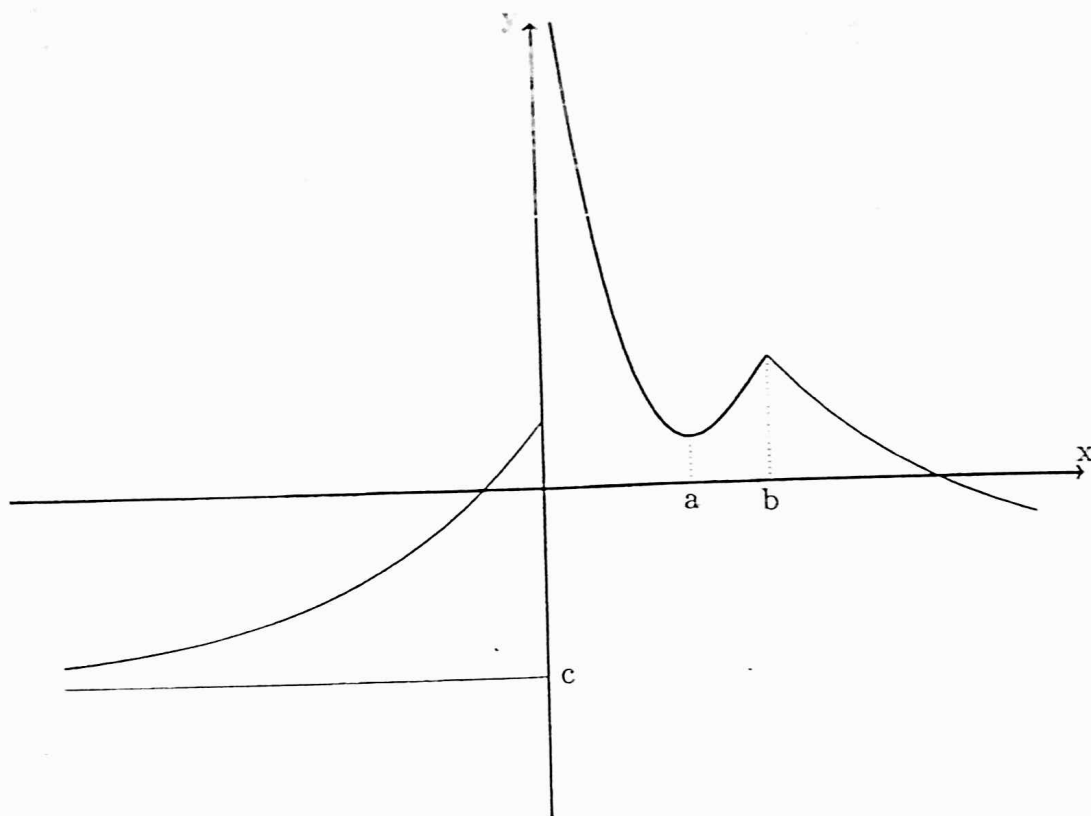
On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
Déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivabilité puis étudier et tracer la fonction f .

Exercice 3

1. Pour quelles valeurs de β , a-t-on $\frac{n^\beta + n^2 \ln n}{n^2 + 1} = o(n^3)$ au voisinage de $+\infty$.
2. Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

- a) Quel est l'ensemble de définition de g ?
- b) En posant $x = \cos t$, simplifier l'écriture de g



ANNEXE

Contrôle I d'Analyse I
Durée: 2h30

Questions de cours

I) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' . On suppose $\ell' \neq 0$.

En utilisant la définition de la convergence d'une suite :

1. Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les v_n sont non nulles.

2. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

II) 1. Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$.

2. Enoncer le théorème des accroissements finis pour f sur $[a, b]$ et le démontrer en utilisant celui de Rolle.

3. En appliquant le théorème des accroissements finis pour f sur $[a, b]$, montrer que pour f dérivable sur $]a, b[$, f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $f' \geq 0$ sur $]a, b[$.

Exercice 1

1. On considère la suite (u_n) définie par la récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \alpha u_n + (1 - \alpha)u_{n-1}, \quad n \geq 1$$

avec $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$. Etudier le comportement de la suite (u_n) en fonction du paramètre réel α .

2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln[(1 + a^n)^{\frac{1}{n^\lambda}}]$ est finie avec $a \geq 1$?

3. Soit E le domaine de validité de l'inégalité $\sqrt{2-x} > x$.

Déterminer s'il existe $\inf_{\mathbb{R}}(E)$, $\min_{\mathbb{R}}(E)$, $\sup_{\mathbb{R}}(E)$, $\max_{\mathbb{R}}(E)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f .

2. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$, en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

4. Justifier que pour tout $y \geq 0$, $\operatorname{th}(y) \leq y$. Dresser ensuite le tableau de variations de f , puis tracer la courbe représentative de f .

Exercice 3

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante. Indication : étudier $\ln u_n$.

2. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$.

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{na}{n+a} \leq \ln u_n \leq a$.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

5. Quel résultat obtient-on pour $a = 1$?

Devoir d'algèbre linéaire : session normale (Durée : 3h)

«Documents non autorisés.»

Exercice 1 . (5pts)

Soient a et b deux réels. On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]; f(P(X)) = X^2 P''(X) - (a + b - 1)XP'(X) + abP(X).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $f(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Donner la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 . (7.5pts)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par
 $f(x, y, z, t) = (x - y + z, 0, x + y - z + t, t)$.

Soit

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z + t = 0\}.$$

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$ -linéaire.
2. Donner la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer une base de $\ker f$ et sa dimension.
4. Déterminer le rang de f et une base de $\operatorname{im} f$.
5. A-t-on $\ker f \oplus \operatorname{im} f = \mathbb{R}^4$? Justifier la réponse.
6. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^4$ et donner sa dimension.
7. A-t-on $\ker f \oplus E = \mathbb{R}^4$? Justifier la réponse.

Exercice 3 (7.5pts)

On considère les réels a , b et c ; et la matrice carrée

$M_n = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont définis par :

$$\begin{cases} m_{ij} = a & \text{si } i = j \\ m_{ij} = b & \text{si } i < j \\ m_{ij} = c & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On pose $b = c$.
 - (a) Calculer le déterminant de M_n sous forme factorisée.
 - (b) En déduire le rang de M_n suivant les valeurs de a , b et n .
 - (c) Discuter de l'inverse de A suivant les valeurs de a et b .
2. Pour $b \neq c$, on pose $D_n = \det(M_n)$.
 - (a) Montrer que $D_n = b(a - c)^{n-1} + (a - b)D_{n-1}$ avec $n \geq 2$.
 - (b) Montrer que $D_n = \frac{b(a - c)^n - c(a - b)^n}{b - c}$.

Devoir d'Algèbre
Durée : 3 heures

Exercice 1. (2+1+2+2)pts

On considère $f: E \rightarrow F$ une application.

- (1) Montrer que si $\forall A, B \subset \mathcal{P}(E)$, $f(A \Delta B) = f(A) \Delta f(B)$, alors f est injective.
- (2) Soient $A, B \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.
- (3) Soient $A, B \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que si f est injective alors $f(A \Delta B) \subset f(A) \Delta f(B)$.
- (4) Dédurre des questions précédentes que f est injective si et seulement si $\forall A, B \subset \mathcal{P}(E)$, $f(A \Delta B) = f(A) \Delta f(B)$.

Exercice 2. (2+(1+2+2))pts

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini noté multiplicativement. Montrer que si $f: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (G, \cdot)$ est un morphisme de groupes alors pour tout $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, on a $f(\frac{m}{n}) = e_G$. Conclusion ?
- (2) Soient $n, d \in \mathbb{N}^*$, G un groupe abélien d'ordre n noté multiplicativement et $f: G \rightarrow G$ l'application définie par $x \mapsto x^d$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme de G .
 - (b) Montrer que si $n \wedge d = 1$ alors f est un automorphisme de G .
 - (c) En déduire que si n est impair alors tout élément de G est un carré.

Exercice 3. (2+(2+2))pts

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Effectuer dans $\mathbb{R}(X)$ la DES de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^2}{(X^2 + 1)^n}$$

- (2) Soit $F(X) = \frac{N(X)}{D(X)}$ une fraction rationnelle non nulle écrite sous forme irréductible.
 - (a) Montrer que si a est un pôle simple de $F(X)$ alors $D'(a) \neq 0$ et que le coefficient de X^{-1}_a dans la DES de $F(X)$ est $\frac{N(a)}{D'(a)}$.
 - (b) Effectuer dans $\mathbb{C}(X)$ la DES de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{(X^n - 1)}, n \geq 2.$$

Devoir d'Algèbre
Durée : 3 heures

Exercice 1. $((1+2)+(3+1))pts$

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Soit E un ensemble et $A \subset E$. On considère l'application $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ définie par $X \mapsto A \cap X$.
 - (a) Montrer que f est surjective.
 - (b) Montrer que f est injective si et seulement si $A = E$
- (2) Soit E un ensemble et $A \subset E$. On considère sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$B \mathcal{R} C \iff B \Delta C \subset A$$

- (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- (b) Montrer que $K \subset A \implies B \mathcal{R} ((B \cap {}^c_E A) \cup K)$

On rappelle que $B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$.

Exercice 2. $(1+2+2+1+2)pts$

Soit $(G, \times)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$.

- (1) Donner la liste de tous les éléments de G .
- (2) Pour chaque $x \in G$, déterminer $\langle x \rangle$ le sous-groupe de $(G, \times)$ engendré par x .
- (3) Déterminer un ensemble minimal de générateurs du groupe $(G, \times)$.
- (4) Le groupe $(G, \times)$ est-il cyclique? Justifier la réponse.
- (5) Déterminer tous les sous-groupes de $(G, \times)$ en précisant un ensemble de générateurs.

Exercice 3. $(2+3)pts$

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Sachant que le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P(X)$ par $X-a$ est 1 et celui de la division euclidienne de $P(X)$ par $X-b$ est -1 , avec $a \neq b$, quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$?
- (2) On pose $Q_0(X) = (X-1)(X-2)^2$, $Q_1(X) = X(X-2)^2$, $Q_2(X) = X(X-1)$. A l'aide de la DES de $\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}$, trouver des polynômes A_0, A_1, A_2 telque $A_0Q_0 + A_1Q_1 + A_2Q_2 = 1$. Que peut-on en déduire sur Q_0, Q_1, Q_2 ?

Date : 13/03/2021

UFR-ST/MPI/L1

Durée : 3h 00mn

Examen de Statistique

NB : Documents non autorisés. Compte sera tenu de la qualité de la rédaction. Le sujet comporte trois (03) exercices et porte sur deux pages.

Exercice 1 (8 points)

Soit $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ une série statistique à deux dimensions. On se propose d'ajuster sur ces données une relation linéaire $y = ax$.

1) Déterminer a tel que $S(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2$ soit minimum.

2) a étant égal à la valeur obtenue dans la première question, vérifier qu'après ajustement on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right).$$

3) Pour mesurer la qualité de l'ajustement linéaire, on pose $d = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)}$.

a) Démontrer que $d \in [0, 1]$.

b) Démontrer que tous les points sont alignés si et seulement si $d = 1$.

4) **Application** : Les rayons γ pur émis par une substance radioactive sont en partie absorbés par les écrans de plomb. Si N désigne le nombre d'atomes radioactifs exprimé dans une unité qui correspond à la mesure au compteur Geiger, on a la loi théorique : $N = N_0 e^{-ax}$ où N_0 correspond à l'absence d'écran, x désigne l'épaisseur des écrans et a une constante. On a obtenu les mesures ci-dessous ; où n est le nombre d'écrans de 2 mm d'épaisseur.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
N	8623	7333	6273	5347	4679	4031	3384	2956

a) Déterminer la valeur de la constante a en utilisant un ajustement linéaire.

b) Calculer la valeur du coefficient d .

Exercice 2 (6 points)

Dans un magasin de pièces détachées, sur un lot de 100 pièces vendues en une année ; les prix s'échelonnent entre 200 FCFA et 800 FCFA selon la répartition suivante :

Prix en FCFA	[200,300[	[300,450[	[450,550[	[550,600[	[600,800[
Nombre de pièces vendues	15	35	25	10	15

- Calculer les effectifs cumulés croissants et les fréquences cumulées croissantes de cette série statistique.
- Déterminer le mode M_0 de cette série, graphiquement et par calcul.
- Déterminer la médiane M_e de cette série en explicitant vos calculs. Donner son interprétation.
- Déterminer les quartiles Q_1 et Q_3 puis calculer l'intervalle inter-quartile relatif. Conclure.

Exercice 3 (6 points)

On a administré une drogue à 10 rats et 10 rats du lot, la dose d était de 1 unité ($d_1 = 1$), pour 10 autres de 2 unités ($d_2 = 2$), pour 10 autres de 4 unités ($d_3 = 4$) et pour les 10 derniers de 8 unités ($d_4 = 8$). On a mesuré la performance Y de ces rats sous l'influence de la drogue dans une certaine tâche et obtenu les résultats moyens suivants :

Dose d_i	d_1	d_2	d_3	d_4
Performance y_i	9	12,1	21,2	22,8

On pose $x_i = 2 \frac{\ln d_i}{\ln 2} - 3$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

- 1) Représenter dans le plan le nuage de point (x_i, y_i) pour $i = 1, 2, 3, 4$.
- 2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y par rapport à X par la méthode des moindres carrés.
- 3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .
- 4) Donner une estimation de la performance pour une dose de 3 unités.

Fin.

Examen de Statistique

NB : Documents non autorisés. Compte sera tenu de la qualité de la rédaction. Le sujet comporte trois (03) exercices et porte sur deux pages.

Exercice 1 (8 points)

Soit $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ une série statistique à deux dimensions. On se propose d'ajuster sur ces données une relation linéaire $y = ax$.

1) Déterminer a tel que $S(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2$ soit minimum.

2) a étant égal à la valeur obtenue dans la première question, vérifier qu'après ajustement on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right).$$

3) Pour mesurer la qualité de l'ajustement linéaire, on pose $d = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)}$.

a) Démontrer que $d \in [0, 1]$.

b) Démontrer que tous les points sont alignés si et seulement si $d = 1$.

4) **Application** : Les rayons γ pur émis par une substance radioactive sont en partie absorbés par les écrans de plomb. Si N désigne le nombre d'atomes radioactifs exprimé dans une unité qui correspond à la mesure au compteur Geiger, on a la loi théorique : $N = N_0 e^{-ax}$ où N_0 correspond à l'absence d'écran, x désigne l'épaisseur des écrans et a une constante. On a obtenu les mesures ci-dessous ; où n est le nombre d'écrans de 2 mm d'épaisseur.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
N	8623	7333	6273	5347	4679	4031	3384	2956

a) Déterminer la valeur de la constante a en utilisant un ajustement linéaire.

b) Calculer la valeur du coefficient d .

Exercice 2 (6 points)

Dans un magasin de pièces détachées, sur un lot de 100 pièces vendues en une année, les prix s'échelonnent entre 200 FCFA et 800 FCFA selon la répartition suivante :

Prix en FCFA	[200, 300[	[300, 400[	[400, 500[	[500, 600[	[600, 800]
Nombre de pièces vendues	15	25	30	10	15

1. Calculer la moyenne, la variance, l'écart type et le coefficient d'asymétrie de la série statistique.
2. Déterminer la médiane.
3. Déterminer la modalité.
4. Déterminer les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle interquartile.

On a administré une drogue à 40 rats du lot, la dose d était de 1 unité ($d_1 = 1$), pour 10 autres de 2 unités ($d_2 = 2$), pour 10 autres de 4 unités ($d_3 = 4$) et pour les 10 derniers de 8 unités ($d_4 = 8$). On a mesuré la performance Y de ces rats sous l'influence de la drogue dans une certaine tâche et obtenu les résultats moyens suivants :

Dose d_i	d_1	d_2	d_3	d_4
Performance y_i	9	12,1	21,2	22,8

On pose $x_i = 2 \frac{\ln d_i}{\ln 2} - 3$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

- 1) Représenter dans le plan le nuage de point (x_i, y_i) pour $i = 1, 2, 3, 4$.
- 2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y par rapport à X par la méthode des moindres carrés.
- 3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .
- 4) Donner une estimation de la performance pour une dose de 3 unités.

Fin.